

EINFLUSS DER EXZENTRISCHEN AUFSTELLUNG DES WINKELABSTECKGERÄTES AUF DIE LAGE DES ABSTECKPUNKTES

Von

Á. DETREKŐI

Lehrstuhl für Höhere Geodäsie, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 18. Mai 1969)

Vorgelegt von Prof. Dr. I. HAZAY

Sowohl das in- als auch das ausländische Schrifttum befassen sich eingehend mit der Auswirkung des Aufstellfehlers der Theodolite auf den gemessenen Winkel. Hingegen gibt es nur wenige Werke über die Auswirkung des Zentrierungsfehlers des Instrumentes auf die Lage des Absteckpunktes. [1, 2, 3]. Die in [1] mitgeteilten Beziehungen eignen sich nur zur qualitativen Untersuchung der Erscheinung, und nicht für praktische Berechnungen. Verfasser hat sich mit dieser Frage eingehend befaßt und teilt hier die Ergebnisse und die Weiterentwicklung der beschriebenen Untersuchungen mit.

Beim Abstecken kann die Wirkung des Zentrierungsfehlers — besonders bei kurzen Strecken — die Wirkungen der Instrumentenfehler, der subjektiven und der aus äußeren Umständen sich ergebenden Fehler erreichen, ja sogar überschreiten.

Die infolge von exzentrischer Aufstellung vorkommenden Fehler können mittels Funktionen erfaßt werden. Die erhaltenen Funktionen sind praktisch verwertbar. Der sich aus der exzentrischen Aufstellung ergebende Fehler wird stets als die Entfernung zwischen der Lage der exzentrisch und zentrisch abgesteckten Punkte aufgefaßt. Die Aufgabe besteht aus der Absteckung eines vom Punkt A in Entfernung b liegenden Punktes B. Die Richtung AB bildet einen Winkel α mit der Richtung AC, bestimmt durch Punkt C in Entfernung c vom Punkt A. Der Theodolit wurde anstatt in A, exzentrisch in A_1 aufgestellt. Die Exzentrizität wird durch ihr lineares Maß ($e = AA_1$) und ihrer Richtung charakterisiert. Letztere ist der Richtungswinkel ω der Richtung AC bezogen auf die Richtung AA_1 , als Anfangsrichtung.

Es werden drei Fälle unterschieden. Im ersten Fall werden sowohl der Winkel α als die Entfernung b aus A_1 abgesteckt (Abb. 1). Laut [1] wurden die Untersuchungen nur für diesen Fall durchgeführt.

Im zweiten Fall wird nur die Winkel aus A_1 , die Länge daher auch weiter aus A abgesteckt (Abb. 2). Beim Abstecken des polaren, des rechteckigen und des Meßpunktes gilt meistens dieser Fall, da der Theodolit — zufolge der Unvollkommenheit des Lotgeräts — oft etwas exzentrisch aufgestellt wird, hingegen kann er auf A ausgerichtet sein, wenn die Länge mit Hilfe eines Bandmaßes abgesteckt wird.

Im dritten Fall wird das Winkelabstecken aus A_1 durchgeführt. Die Länge wird nicht gemessen. Der Fehler gleicht der Entfernung zwischen dem Punkt B und dem Schnittpunkt der aus A_1 abgesteckten und in B mit der

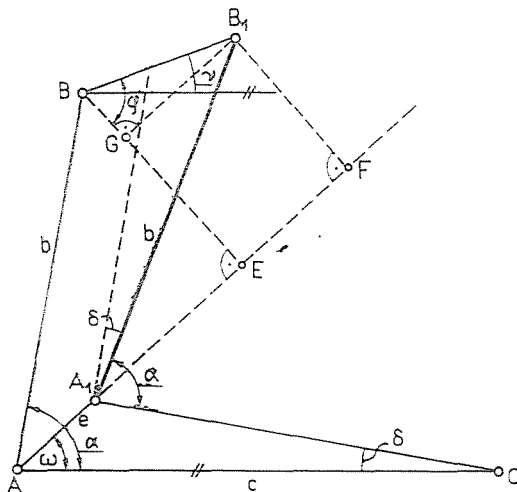


Abb. 1

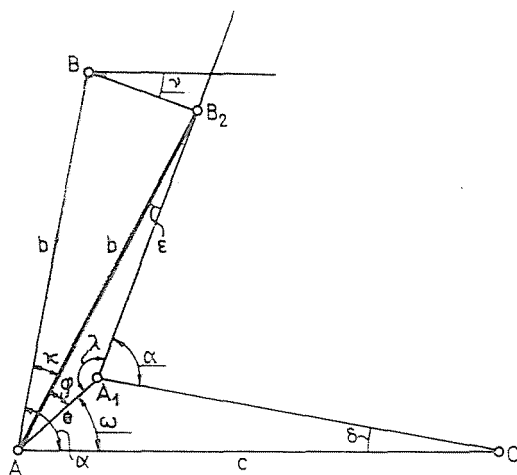


Abb. 2

Richtung BA einen Winkel γ bildenden Richtung (Abb. 3). Das ist der Fall beim Vorwärtseinschneiden, sowie bei der Absteckung der sog. Achsenpunkte (Punkte die sich einer Geraden anpassen, aber entlang derselben sich bewegen können).

Im ersten Fall (Abb. 1) sei B_1 der abgesteckte Punkt. Auf die Verlängerung der Strecke $\overline{AA_1}$ wird aus B und B_1 je eine Senkrechte gezogen, mit den Fußpunkten E bzw. F . G ist der Fußpunkt der aus B_1 auf die Strecke \overline{BE} gezogenen Senkrechten. Aus Abb. 1 ist ersichtlich, daß

$$\overline{BB_1} = [\overline{BG}^2 + \overline{B_1G}^2]^{1/2}. \quad (1)$$

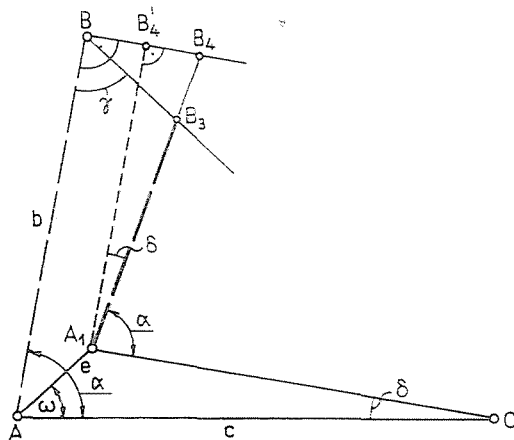


Abb. 3

Hingegen

$$\begin{aligned} \overline{BG} &= \overline{BE} - \overline{EG} = \overline{B_1F} = b \sin(\alpha - \omega) - b \sin(\alpha - \omega - \delta) = \\ &= 2b \cos \left[(\alpha - \omega) - \frac{\delta}{2} \right] \sin \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

und

$$\begin{aligned} \overline{B_1G} &= \overline{EF} = \overline{AA_1} + \overline{A_1F} - \overline{AE} = e + b \cos(\alpha - \omega - \delta) - \\ &- b \cos(\alpha - \omega) = e + 2b \sin \left[(\alpha - \omega) - \frac{\delta}{2} \right] \sin \frac{\delta}{2} \dots \end{aligned} \quad (3)$$

δ soll aus dem Dreieck AA_1C ausgedrückt werden:

$$\delta = \arcsin \frac{e}{c} \sin \omega. \quad (4)$$

Da der Wert δ sehr klein ist, kann er in (2) und (3) innerhalb der eckigen Klammern vernachlässigt werden, außerhalb ist die folgende Näherung zulässig:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} = \frac{e}{2c} \sin \omega. \quad (5)$$

Beachtend die Vernachlässigungen und (5) gilt

$$\overline{BG} = -2b \cos(\alpha - \omega) \frac{e}{2c} \sin \omega \quad (6)$$

$$\overline{B_1G} = e + 2b \sin(\alpha - \omega) \frac{e}{2c} \sin \omega. \quad (7)$$

Die Werte aus (6) und (7) in (1) eingesetzt, ist der gesuchte Fehler

$$\overline{BB_1} = e \left[1 + \frac{b^2}{c^2} \sin^2 \omega + 2 \frac{b}{c} \sin \omega \sin(\alpha - \omega) \right]^{1/2} \quad (8)$$

Die Fehlerrichtung wird durch ihren mit Richtung AB gebildeten Winkel ν gekennzeichnet:

$$\nu = 90^\circ - (\alpha - \omega) + \varrho - (180^\circ - \alpha) = \omega + \varrho - 90^\circ \quad (9)$$

wobei

$$\begin{aligned} \varphi = \arctg \frac{\overline{B_1G}}{\overline{BG}} &= \arctg \frac{e + 2b \sin(\alpha - \omega) \frac{e}{2c} \sin \omega}{2b \cos(\alpha - \omega) \frac{e}{2c} \sin \omega} = \\ &= \arctg \left[\operatorname{tg}(\alpha - \omega) + \frac{c}{b \cos(\alpha - \omega) \sin \omega} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Der zweite Fall ist in Abb. 2 dargestellt. Die tatsächliche Punktstelle ist B_2 . Da der Fehler $\overline{BB_2}$ gering ist, darf man aufschreiben:

$$\overline{BB_2} = b \cdot \alpha \quad (11)$$

Es soll der Winkel α ausgedrückt werden. Aus Abb. 2 ist ersichtlich, daß

$$\alpha = \alpha - \omega - \varphi \quad (12)$$

in dieser Beziehung ist φ unbekannt, hingegen aus dem Dreieck AB_2A_1

$$\varphi = 180^\circ - \varepsilon - \lambda \quad (13)$$

wobei

$$\lambda = 360^\circ - \alpha - (180^\circ - \omega - \delta) = 180^\circ - (\alpha - \omega - \delta) \quad (14)$$

Aus dem Dreieck AB_2B_1

$$\varepsilon = \arcsin \frac{e}{b} \sin \lambda. \quad (15)$$

Werden die Beziehungen (15) und (14) in (13) substituiert und geordnet, so ist:

$$\varphi = \alpha - \omega - \delta - \arcsin \frac{e}{b} \sin \lambda. \quad (16)$$

Der Wert von (16) in (15) eingesetzt, und geordnet, wird mit Hilfe von (14):

$$\alpha = \arcsin \frac{e}{c} \sin \omega + \arcsin \frac{e}{b} \sin (\alpha - \omega - \delta). \quad (17)$$

Aus der Reihenentwicklung von (17) und Vernachlässigung der höheren Potenzen und δ ergibt sich:

$$\alpha = \frac{e}{c} \sin \omega + \frac{e}{c} \sin (\alpha - \omega). \quad (18)$$

Den Wert von (18) in (11) substituierend, gibt:

$$\overline{BB_2} = e \sin (\alpha - \omega) + e \frac{b}{c} \sin \omega. \quad (19)$$

Die Fehlerrichtung wird durch den Winkelwert gekennzeichnet:

$$\nu = 180^\circ - \alpha - \frac{180 - \alpha}{2} = 90^\circ - \alpha - \frac{\alpha}{2}. \quad (20)$$

Im nächsten Fall (Abb. 3) ist B_3 die tatsächlich abgesteckte Punktstelle. Es soll in B eine Senkrechte auf die Gerade AB gestellt werden, die die aus A_1 abgesteckte Richtung in B_1 schneidet. Zuerst soll die Strecke BB_1 berechnet werden.

$$\overline{BB_1} = \overline{BB'_1} + \overline{B'_1B_1} \quad (21)$$

Aus Abb. 3 ist abzulesen, daß

$$\overline{BB'_1} = e \sin (\alpha - \omega) \quad (22)$$

und

$$\overline{B'_1B_1} = [b - e \cos (\alpha - \omega)] \sin \delta \quad (23)$$

Wird das Glied $e \cos (\alpha - \omega)$ innerhalb der eckigen Klammern in (23) vernachlässigt und der Wert δ substituiert:

$$\overline{B'_1B_1} = e \frac{b}{c} \sin \omega \quad (24)$$

(22) und (24) in (21) eingesetzt, ergibt sich:

$$\overline{BB_4} = e \sin (\alpha - \omega) + e \frac{b}{c} \sin \omega. \quad (24)$$

Aus Dreieck BB_4B_3 :

$$\frac{\overline{BB_3}}{\overline{BB_4}} = \frac{\sin (90^\circ - \delta)}{\sin (90^\circ - \delta + 90^\circ - \gamma)} = \frac{\cos \delta}{\sin (\gamma + \delta)} \quad (25)$$

da δ ein sehr kleiner Winkel ist, sind die folgenden Näherungen zulässig:

$$\cos \delta = 1 \text{ und } \sin (\gamma + \delta) = \sin \gamma. \quad (26)$$

Wird (26) in (25) eingesetzt, geordnet und (24) verwendet, erhält man

$$\overline{BB_3} = \frac{1}{\sin \gamma} \left[e \sin (\alpha - \omega) + e \frac{b}{c} \sin \omega \right]. \quad (27)$$

Aus dem Vergleich von (27) und (19) ist ersichtlich, daß die zwei Beziehungen voneinander bloß durch den vom Winkel γ abhängigen Multiplikator abweichen.

Des weiteren soll untersucht werden, bei gegebenen Absteckmaßen (b, α, γ) und gegebener linearer Exzentrizität, für welchen ω -Wert die Fehler Extremalwerte aufweisen. Bei den Berechnungen wurde aus (8) und (19) ausgegangen. (Die mittels letzterer erhaltenen Werte sind auch für (27) gültig, infolge der bereits erläuterten Ähnlichkeit.)

Die Fehler haben ihre Extremalwerte, wo der Wert ihrer partiellen Derivate nach ω Null ist.

$$\frac{\partial \overline{BB_1}}{\partial \omega} = \frac{1}{2} e \cdot \frac{2 D^2 \sin \omega \cos \omega + 2 D \cos \omega \sin (\alpha - \omega) - 2 D \sin \omega \cos (\alpha - \omega)}{[1 + D^2 \sin^2 \omega + 2 D \sin \omega \sin (\alpha - \omega)]^{1/2}} \quad (28)$$

wobei $D = \frac{b}{c}$.

Wird (28) Null gleichgestellt und auf ω gelöst, erhält man:

$$\omega = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - D}. \quad (29)$$

Der Extremalwert des Fehlers $\overline{BB_2}$ nach ω wird berechnet.

$$\frac{\partial \overline{BB_2}}{\partial \omega} = - \cos (\alpha - \omega) + D \cos \omega = 0 \quad (30)$$

somit:

$$\omega = \arctg \frac{D - \cos \alpha}{\sin \alpha} . \quad (31)$$

Die abgeleiteten Beziehungen können auf zweierlei Weisen benützt werden. Sind das lineare Maß und die Richtung der Exzentrizität bekannt — wie dies bei Winkelmessung oft der Fall ist —, kann im Prinzip die Zentrierung erfaßt werden, um ihr die Absteckpunktstellen zu verändern. Diese Anwendungsweise hat sich aber zufolge der Eigenart der Absteckarbeiten nicht verbreitet. Die Beziehungen können auch bei Berechnung der Absteckgenauigkeit verwendet werden. Hier wird dann, anstatt des linearen Exzentrizitätsmaßes, der mittlere Fehler der Zentrierung μ_e als bekannt betrachtet, mit dem der mittlere Fehler der Absteckpunktlage berechnet werden soll.

Wäre aber auch die Richtung der Exzentrizität bekannt, so könnte mit e als Veränderliche in den Beziehungen (8) und (27) das Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet werden. Also z. B., auf Grund von (8):

$$\mu_B = \mu_e \left[1 + \frac{b^2}{c^2} \sin^2 \omega + 2 \frac{b}{c} \sin \omega \sin (\alpha - \omega) \right]^{1/2} = \mu_e k . \quad (32)$$

Die Richtung der Exzentrizität ist jedoch nur selten bekannt, so kann das Fehlerfortpflanzungsgesetz nur mit Voraussetzungen angewendet werden. Zwei Voraussetzungen scheinen begründet:

1. Die Richtung der Exzentrizität bedingt den Höchstwert des zufolge von μ_e entstehenden mittleren Fehlers μ_B ,

2. Der Absteckpunktfehler kommt in jeder Richtung der Ebene mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor.

Im Falle der ersten Voraussetzung kann die Exzentrizitätsrichtung, in Kenntnis der Absteckmaße, aus Beziehungen (29) und (31) bestimmt werden. Die für ω_{\max} erhaltenen Werte werden in die Beziehungen (8), (19) und (27) eingesetzt, wodurch das Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet werden kann. Das Ergebnis der Berechnungen ist in allgemeiner Form:

$$\mu_{BB} = \mu_e \cdot k_{i_{\max}} . \quad (33)$$

Der zweite Fall bedeutet, daß die Stehachse des Gerätes — bei einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsniveau — in das Gebiet eines Horizontalkreises mit Mittelpunkt A und Radius e passen muß. Wird der Kreisumfang auf n Teile geteilt, so ist der zu den einzelnen Teilen gehörige Zentriwinkel $\Delta \omega$ [5, 6]:

$$\frac{2\pi}{\Delta \omega} = n . \quad (34)$$

Die den einzelnen Teilen entsprechenden Exzentrizitätsfehlerwerte $\overline{BB_1}$ lauten:

$$(\overline{BB_1})_1 \quad (\overline{BB_1})_2 \quad \dots \quad (\overline{BB_1})_n.$$

In Kenntnis der Fehler kann der mittlere Fehler aufgrund der bekannten Beziehung ermittelt werden

$$m_{\overline{BB_1}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (BB_1)_i^2}{n}. \quad (35)$$

Wird aus (33) der Wert n und anstatt $\overline{BB_1}$ die Formel (8) in (34) eingesetzt, so ist

$$m_{\overline{BB_1}}^2 = \frac{e^2 \sum_{i=1}^{i=n} [1 + D^2 \sin^2 \omega + 2 D \sin \omega \sin (\alpha - \omega)]}{\frac{2\pi}{\Delta\omega}} \quad (36)$$

wobei $D = \frac{b}{c}$.

Geordnet:

$$m_{\overline{BB_1}}^2 = \frac{e^2}{2\pi} \sum_{i=1}^{i=n} [1 + D^2 \sin^2 \omega + 2 D \sin \omega \sin (\alpha - \omega)] \Delta\omega. \quad (37)$$

Wird die Summierung durch Integration substituiert, erhält man:

$$m_{\overline{BB_1}}^2 = \frac{e^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 + D^2 \sin^2 \omega + 2 D \sin \omega \sin (\alpha - \omega)] d\omega. \quad (38)$$

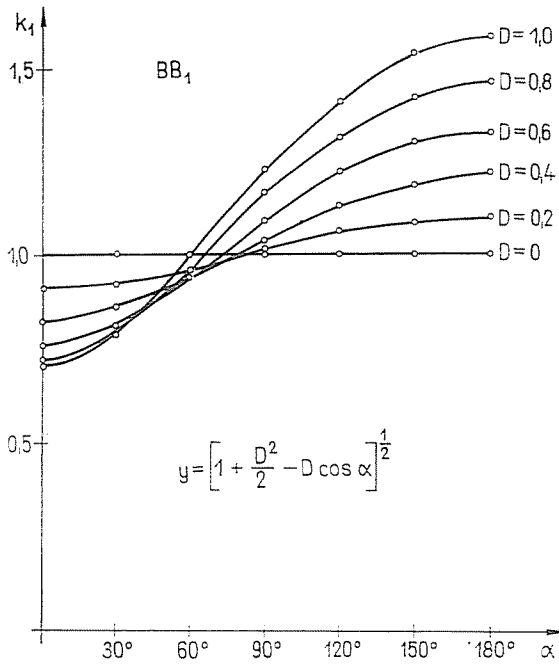
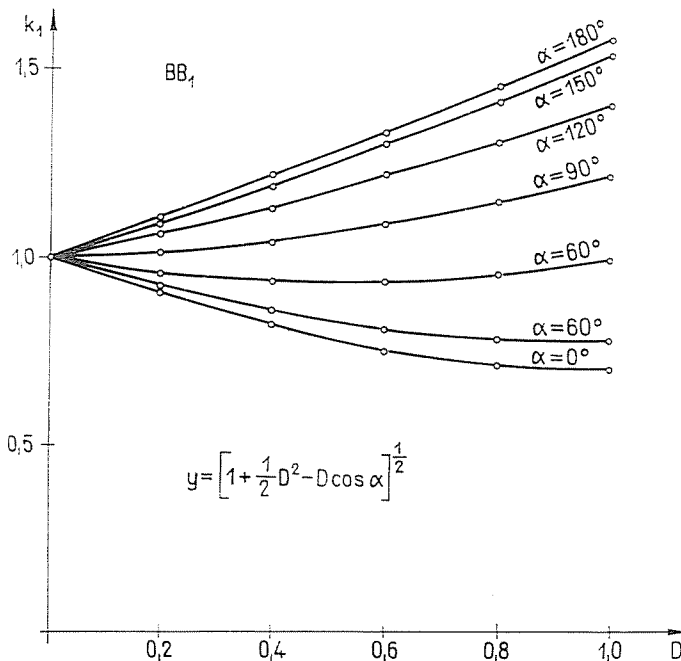
Nach Integration und Wurzelziehung, ergibt sich

$$m_{\overline{BB_1}} = e \left[1 + \frac{1}{2} D^2 - D \cos \alpha \right]^{1/2}. \quad (39)$$

Aufgrund des hier erläuterten Gedankenganges ist, aus (19):

$$m_{\overline{BB_2}} = e \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} D^2 - D \cos \alpha \right]^{1/2}. \quad (40)$$

Für die Beziehungen (39) und (40) kann nun das Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet werden, also

Abb. 4. Werte für k_1 durchschn. in Abhängigkeit von α aus Formel (41)Abb. 5. Werte für k_1 durchschn. in Abhängigkeit von D aus Formel (41)

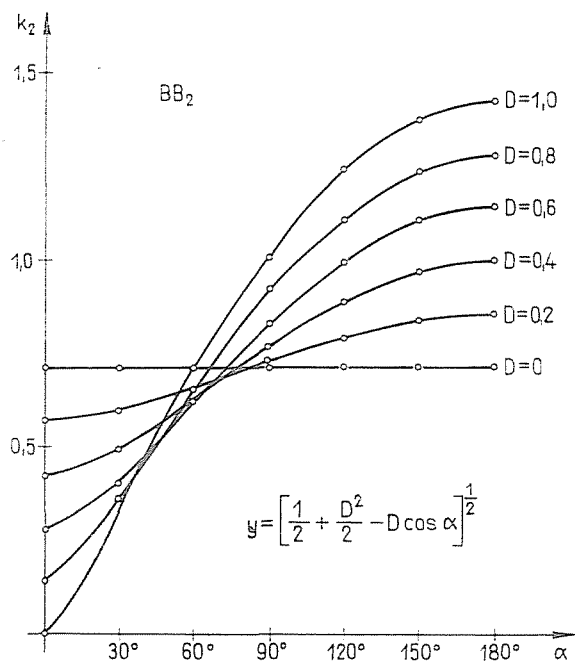


Abb. 6. Werte für k_2 durchschn. in Abhängigkeit von α aus Formel (42)

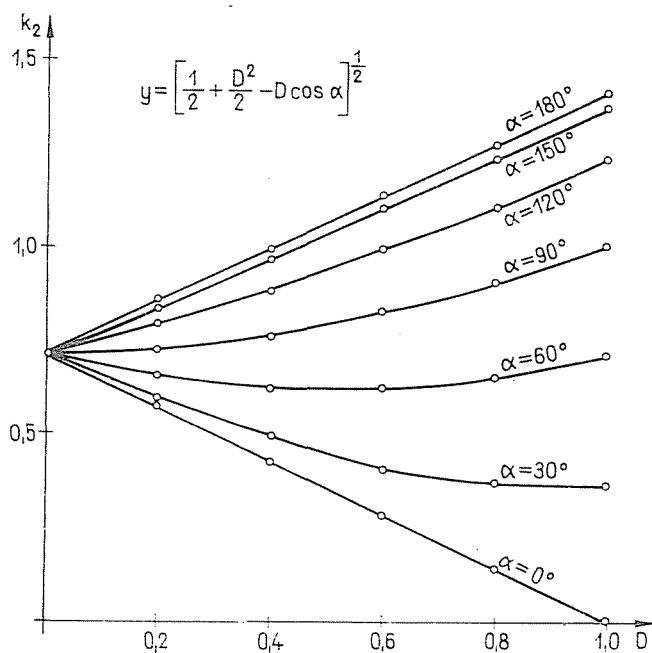


Abb. 7. Werte für k_2 durchschn. in Abhängigkeit von D aus Formel (42)

Tafel I

D	$k_{1\max}$		$k_{1\text{durchschn.}}$		$k_{2\max}$		$k_{2\text{durchschn.}}$	
	0°	90°	0°	90°	0°	90°	0°	90°
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,71	0,71
0,2	1,00	1,19	0,91	1,01	0,80	1,02	0,57	0,72
0,4	1,00	1,37	0,82	1,04	0,60	1,08	0,42	0,76
0,6	1,00	1,54	0,76	1,09	0,40	1,17	0,28	0,82
0,8	1,00	1,71	0,72	1,15	0,20	1,28	0,14	0,91
1,0	1,00	1,87	0,71	1,22	0,00	1,42	0,00	1,00

Werte $k_{1\max}$ und $k_{1\text{durchschn.}}$ bei Absteckwinkeln $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$

$$\mu_{BB_1} = \mu_e \left[1 + \frac{1}{2} D^2 - D \cos \alpha \right]^{1/2} = \mu_e \cdot k_{1\text{durchschn.}} \quad (41)$$

und

$$\mu_{BB_2} = \mu_e \left[\frac{1}{2} D^2 - D \cos \alpha \right]^{1/2} = \mu_e \cdot k_{2\text{durchschn.}} \quad (42)$$

Aus Abb. 5 und 7 ist es ersichtlich, daß bei 0° , 30° , 60° mit zunehmenden D der Wert für k abnimmt, aber bei 90° , 120° , 150° und 180° zunimmt. Der Anstieg ist für k_1 kleiner als für k_2 . Aus Abb. 4 und 6 geht hervor, daß bei D konstant, k_1 und k_2 mit dem Winkel ansteigen, und zwar umso steiler, desto größer D liegt.

Zum Abschluß seien als Beispiel, bei einem mittleren Fehler der Zentrierung $\mu_e = \pm 2$ mm, einem Absteckwinkel $\alpha = 90^\circ$, und $D = 0,6$, für den

Tafel II

D	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,2	0,90	0,92	0,96	1,01	1,06	1,09	1,10
0,4	0,82	0,86	0,94	1,04	1,13	1,19	1,22
0,6	0,76	0,81	0,94	1,09	1,22	1,30	1,33
0,8	0,72	0,79	0,96	1,15	1,31	1,42	1,46
1,0	0,71	0,79	1,00	1,22	1,41	1,54	1,58

$k_{1\text{durchschn.}}$ — Werte bei verschiedenen α -Werten, nach Formel (41). (Abb. 4. und 5.)

Tafel III

D	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0,0	0,71	0,71	0,71	0,71	0,71	0,71	0,71
0,2	0,57	0,59	0,65	0,72	0,79	0,83	0,85
0,4	0,42	0,49	0,62	0,76	0,88	0,96	0,99
0,6	0,28	0,40	0,62	0,82	0,99	1,10	1,13
0,8	0,14	0,36	0,65	0,91	1,10	1,23	1,27
1,0	0,00	0,36	0,71	1,00	1,23	1,37	1,41

k_2 durchschn. Werte aus Formel (42) (Abb. 6 und 7).

zweiten untersuchten Fall die Höchst- und Durchschnittswerte des mittleren Fehlers zu bestimmen. Aus Tafel I:

$$k_2 \max = 1,17 \quad \text{und} \quad k_2 \text{ durchschn.} = 0,82.$$

Daraus sind

$$\mu_2 \max = \pm 3,3 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \mu_2 \text{ durchschn.} = \pm 1,6 \text{ mm}.$$

Zusammenfassung

Die Wirkung der untersuchten Fehlerquelle kann besonders bei Kurzstrecken bedeutend sein.

Der Wert des Fehlers aus exzentrischer Aufstellung kann mittels Funktionen erfaßt werden. Diese Funktionen sind praktisch verwendbar, besonders für die Berechnung des mittleren Fehlers der Absteckpunkte. Die Berechnung des mittleren Fehlers kann durch die vorggeführten Tafel erleichtert werden, deren Anwendung an Hand von Beispielen illustriert wird.

Schrifttum

1. LJUTZ, A. F.: Anlegung großer Bauten. Verl. Technik, Berlin, 1953 und Rasbivka krupnih sooruschenij, Moskau, Geodesisdat, 1957.
2. MARFENKO, S. V.: Dissertation für die Kandidatur, Moskau, 1964.
3. LEVTSCHUK, G. F.: Kolleghefte über industrielle Geodäsie. Manuskript, Moskau, 1968.
4. DETREKŐI, Á.: Genauigkeitsuntersuchung von Absteckungen an neuen Industrieanlagen. (In ungarischer Sprache). Techn. Doktorarbeit. Budapest, 1966.
5. FIALOVSKY, L.: Beitrag zum Vortrag von A. Tárczy-Hornoch. Eine genaue Lösung der Zwangszentrierung. (In ungarischer Sprache) MTÁ. Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei V, 1952.
6. TSCHBOTAREW, A. S.—SELIZHANOVITSCH, V. I.—SOKOLOV, M. H.: Geodesija II. Geodesisdat, 1962, Moskau.
7. HAZAY, I.: Ausgleichsberechnungen. (In ungarischer Sprache). Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

Oberassistent Dr. Ákos DETREKŐI, Budapest XI., Műegyetem-rkp. 3 Ungarn.